Considerando ora che i determinanti sotto il segno Σ sono tutti compresi nella matrice (A)' e quindi nulli per supposto, e che y_{n+1} è per supposto diverso da zero, si vede che l'equazione si riduce ad

$$\begin{vmatrix} a_{1,i_1} & a_{1,i_2} & \dots & a_{1,i_{h-1}} & \alpha_1 \\ a_{2,i_1} & a_{2,i_2} & \dots & a_{2,i_{h-1}} & \alpha_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{h,i_1} & a_{h,i_2} & \dots & a_{h,i_{h-1}} & \alpha_h \end{vmatrix} = 0$$

Poichè gli indici $i_1, i_2, \dots, i_{h-1}$ possono poi scegliersi a piacere, quest'equazione ci dice che nella matrice (B)' corrispondente al sistema (I)'' anche quei determinanti di ordine h nella cui composizione entra l'ultima colonna sono come gli altri eguali a zero. La matrice del sistema (I)'' avrebbe dunque la sua caratteristica inferiore ad h contro il supposto. Il teorema resta così dimostrato completamente.

Napoli, Gennaio 1892. ALFREDO CAPELLI.

Dimostrazione dell'impossibilità di segmenti infinitesimi costanti.

Si dice che una grandezza u è infinitesima rispetto alla grandezza v, se ogni multiplo di u, secondo un numero intero finito, è minore di v. L'esistenza o meno di grandezze infinitesime dipende dal significato che attribuiamo alla parola *grandezza*. Ed effettivamente si sono formate delle categorie di enti, sui quali si possono definire le relazioni e operazioni analoghe a quelle dell'algebra sui numeri, nelle quali categorie di enti si trovano degli infinitesimi. Così l'ordine di infinità d'una funzione può essere infinitesimo rispetto all'ordine di infinità d'un'altra. In un mio scritto (*) già feci vedere che nella stessa formula di Taylor i successivi termini si possono considerare a nostro arbitrio come infinitesimi variabili o costanti d'ordine diverso.

In tutti questi casi l'ente è determinato da una funzione reale di una variabile reale. Ma fra le grandezze comuni, p. e. fra i segmenti rettilinei, esistono degli infinitesimi?

(*) *Sulla formula di Taylor*, Atti R. Acc. Scienze di Torino, 22 novembre 1891.

Questa questione, dibattutasi fra i dott. VIVANTI e BETTAZZI sulla *Rivista di Matematica*, è assai interessante tanto più che negli ultimi tempi sull'ipotesi della loro esistenza si sono fatte teorie e stampati dei volumi. Ad essa rispose negativamente il CANTOR; ma la dimostrazione che questo illustre matematico ne diede è così concisa, che fu giudicata incompleta. Scopo della presente nota si è di sviluppare questa dimostrazione.

1. Su d'una retta si fissi un'origine o; i punti della retta da una stessa parte di o, p. e. a destra di o, saranno chiamati *punti della semiretta*, o più semplicemente P. Il punto o è un estremo della semiretta, ma non è un punto della classe P:

$o - \varepsilon$ P. « il punto o non è un P ».

2. Essendo p un punto della semiretta, con op intenderemo l'insieme dei punti compresi fra o e p. La classe op dicesi *segmento terminato*; o ne è l'*origine*, p il *termine*. Siccome tutti i segmenti che considereremo hanno la stessa origine, colle parole *il segmento avente per termine* p intenderemo il segmento op. Scriveremo S invece di *segmento terminato*:

$$p \varepsilon \mathrm{P} . \supset . op \varepsilon \mathrm{S}$$

« Se p è un punto della semiretta, op è un segmento terminato ».

3. Spesso indicheremo un segmento con una lettera sola u, v, ... Il termine del segmento u, la sua origine essendo o, è indicato con $\bar{o}u$, in virtù della convenzione sull'inversione delle funzioni (*Sul concetto di numero*, § 5, prop. 3; *Riv. di Mat.* I, p. 97).

$$u \varepsilon \mathrm{S} . \supset . \bar{o}u \varepsilon \mathrm{P}$$

« Se u è un segmento, il suo termine è un punto della semiretta ».

Si badi che un segmento op è una classe di punti; gli estremi o e p non appartengono alla classe op (*).

4. Se u è una classe di punti P, ou rappresenta (*Id.*, § 1, prop. 3; *Riv. di Mat.* I, p. 87) la classe dei segmenti che hanno per termini i punti di u. Come caso particolare, se u è un segmento, ou rappresenta

(*) È inutile l'osservare pel lettore intelligente che il non appartenere o e p alla classe op dipende dalla convenzione fatta di indicare con op l'insieme dei punti compresi fra o e p. Si avrebbe potuto fare la convenzione di indicare con op l'insieme del punto o, dei punti compresi fra o e p, e del punto p; ma le formule riuscirebbero inutilmente complicate.

la classe dei segmenti che hanno per termine qualche punto di u, cioè i segmenti minori di u:

$$u, v \,\varepsilon\, \mathrm{S} \,.\, \supset : v < u \,.\, = .\, u > v \,.\, = .\, v \,\varepsilon\, ou \,.\, = .\, \bar{o}v \,\varepsilon\, u$$

« Essendo u e v due segmenti, dire che v è minore di u, ossia che u è maggiore di v, equivale a dire che v è un segmento terminato ad un punto di u, ovvero che il termine di v è un punto di u ».

5. Se k è una classe di segmenti, e quindi una classe di classi di punti, allora $\cup{'}k$ rappresenta l'insieme dei punti ciascuno dei quali appartiene almeno ad un segmento della classe k (*Id.*, § 9, prop. 6; *Riv. di Mat.* I, p. 259). Quindi se u è una classe di punti, e quindi ou una classe di segmenti, $\cup{'}ou$ rappresenta l'insieme dei punti, ciascuno dei quali sta su qualche segmento ou, cioè ciascuno dei quali ha alla sua destra qualche punto della classe u.

6. I segmenti terminati si sanno sommare; e qui si suppongono note le proprietà della somma, che permettono di dedurre il teorema:

$$u, v \,\varepsilon\, \mathrm{S} \,.\, \supset .\, u + v = \bar{o}(ou + ov)$$

« Essendo u e v due segmenti terminati, il segmento $u + v$ è il luogo dei termini dei varii segmenti che si ottengono sommando un segmento qualunque terminato ad un punto di u con un segmento qualunque terminato ad un punto di v ».

7. Si ha:

$$u \,\varepsilon\, \mathrm{S} \,.\, \supset .\, u \mathrel{-\!=} \Lambda \,.\, u \mathrel{-\!=} \mathrm{P} \,.\, \cup{'}ou = u$$

« Essendo u un segmento terminato, esso:

1° Contiene effettivamente dei punti.

2° Non contiene tutti i punti della semiretta.

3° Ogni punto compreso fra o e un punto di u è pure un punto di u.

4° E viceversa: ogni punto di u è compreso fra o e qualche altro punto di u ».

8. Ora considereremo le classi di punti che hanno le quattro proprietà ora enunciate, cioè le classi u che contengono effettivamente dei punti, ma senza contenerli tutti; se un punto appartiene alla classe u, ogni punto alla sua sinistra appartiene pure alla classe u; e se un punto è un u, sonvi degli altri punti della classe u alla sua destra. Le classi di punti siffatte si diranno *segmenti*, e per brevità s:

$$u \,\varepsilon\, \mathrm{s} \,.\, = .\, u \,\varepsilon\, \mathrm{KP} \,.\, u \mathrel{-\!=} \Lambda \,.\, u \mathrel{-\!=} \mathrm{P} \,.\, \cup{'}ou = u \,.$$

Risulta dalle cose dette che ogni S è un s; la proposizione inversa, che ogni segmento sia limitato, costituisce il postulato di DEDEKIND (V. *Riv. di Mat.* I, p. 109, nota 3ª). Da questo postulato deriva, come è ben noto, e come del resto risulterà da quanto segue, l'impossibilità dell'infinitesimo costante. Quindi noi non ammetteremo nè negheremo questo postulato.

È chiaro che se k è una classe di S, tutti minori d'un segmento dato, la classe di punti indicata con $\cup 'k$ è un segmento. Esso si potrebbe chiamare *il limite* superiore dei segmenti k.

9. La somma di due segmenti in generale si riconduce alla somma di segmenti terminati prendendo la proprietà 6 come definizione:

$$u, v \varepsilon \mathrm{s} . \supset . u + v = \overline{o}(ou + ov)$$

« Per somma dei segmenti u e v si intende il segmento luogo degli estremi di tutti i segmenti che si ottengono sommando due segmenti terminati l'uno ad un punto di u e l'altro ad un punto di v ».

10. Sapendo sommare due segmenti, terminati o no, si può definire il multiplo d'un segmento u secondo il numero intero e positivo n, indicato con nu. Ricordiamo che N sta per le parole « numero intero positivo »; quindi $\mathrm{N}u$ rappresenta i multipli di u. La scrittura $\cup '\mathrm{N}u$ rappresenta i punti che stanno su qualche segmento multiplo di u, cioè i termini dei segmenti minori di qualche multiplo di u.

Porremo $$\infty u = \cup '\mathrm{N}u,$$

cioè chiamiamo multiplo d'ordine infinito di u l'insieme dei punti che stanno sopra qualcuno dei segmenti $u, 2u, 3u, \ldots$ o il limite superiore dei multipli di u. È chiaro che se non esistono segmenti infinitesimi, ∞u rappresenta l'intera semiretta P.

11. Dicesi che il segmento u è infinitesimo rispetto al segmento v, e scriveremo $u \varepsilon v/\infty$, se ogni multiplo di u è minore di v:

$$u, v \varepsilon \mathrm{S} . \supset : u \varepsilon v/\infty . = . \overline{o}v - \varepsilon \cup '\mathrm{N}u.$$

Risulta che, se u è infinitesimo rispetto v, la classe ∞u è un segmento contenuto in v. In conseguenza possiamo aggiungere ad ∞u il segmento u, ottenendo il segmento $(\infty + 1)u$, a cui aggiungendo u otteniamo $(\infty + 2)u$, ecc. Possiamo sommare ∞u con sè stesso, ottenendo così $2\infty u$, ed in generale possiamo formare tutti i multipli di ∞u; possiamo moltiplicare ∞u per ∞, ed ottenere $\infty^2 u$, e così via.

Ma tutti questi varii segmenti, che si ottengono moltiplicando u pei numeri transfiniti di Cantor sono eguali fra loro, come dicono le formule seguenti:

12. $u, v \varepsilon S . u \varepsilon v/\infty . \supset . (\infty + 1) u = \infty u$

« Ogni segmento che può essere superato da un multiplo di u più una parte di u può essere superato da un multiplo di u, e viceversa ».

$$u, v \varepsilon S . u \varepsilon v/\infty . \supset . 2\infty u = \infty u$$

« Ogni segmento che può essere superato dalla somma di due multipli di u può essere superato da un multiplo di u, e viceversa ».

E così via.

Risulta che il segmento ∞u quantunque compreso nel segmento v, non può essere terminato, perchè se ad un segmento terminato si aggiunge il segmento u, ovvero si raddoppia, si avrà un nuovo segmento maggiore del primo.

Ciascuno di questi risultati è in contraddizione col concetto comune di segmento. E dal fatto che il segmento infinitesimo non può essere reso finito mediante alcuna moltiplicazione attualmente infinita, per quanto potente essa sia, conchiudo col Cantor, che esso non può essere elemento di grandezze finite.

G. Peano.

RECENSIONE

Clément Thiry. — *Distances des points remarquables du triangle.*

(Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, III série, t. XXI, 1891).

Dans ce petit travail, l'auteur se propose de démontrer une relation générale *donnant la distance d'un point quelconque* P *au point d'intersection* K_n *des droites qui, issues des sommets d'un triangle, partagent les côtés opposés dans le rapport des puissances nièmes des côtés adjacents*, relation dont les formules classiques, ainsi que la plupart des formules relatives aux points de Brocard, de Lemoine, de Gergonne, etc., ne sont que des cas particuliers. L'auteur établit aussi une seconde relation, assez générale, conduisant à d'autres résultats plus ou moins remarquables.

La formule trouvée par M. Thiry, écrite d'une façon abrégée est la suivante:

$$PK_n = \frac{\Sigma a^n \overline{PA}^2}{\Sigma a^n} - E_n \qquad \text{(P)}$$

E_n étant une constante indépendante de la position du point P. La marche suivie est tout élémentaire et l'auteur n'a fait que l'usage du *théorème de Stewart* [1] sous cette forme:

---

[1] Stewart a fait connaître, en 1763, le théorème suivant: *Si l'on partage la base d'un triangle en deux segments par une droite quelconque*